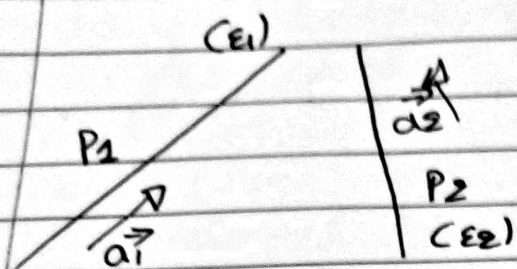


24/4/17

Ασύμβατες ευθείες και η κοινή τους κάθετος
(ασύμβατες κανένα επίπεδο να τα ευναι και τις δύο).



Πως εδείχθη ότι
είναι ασύμβατες;
Οι ευθείες $(E_i), i=1,2$, διέρχονται
από το P_i και είναι $\parallel a_i \neq \vec{0}$
 $(E_1), (E_2)$ είναι ασύμβατες $\Rightarrow$

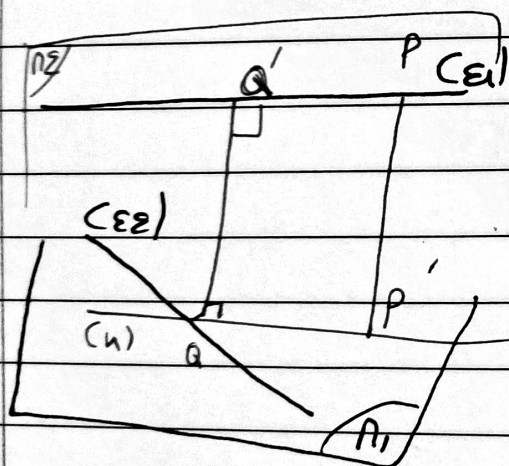
$P_1 \vec{P}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ δεν είναι

συνεπίκεντρα όταν $\Leftrightarrow$

μεικτό-γινόμενο $\rightarrow [P_1 \vec{P}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq 0$

Κοινή κάθετος ασύμβατων ευθειών

Υποθέτω ότι $(E_1), (E_2)$ είναι ασύμβατες



Θεωρώ επίπεδο (Π_1)

το οποίο περιέχει

την (E_2) και είναι $\parallel (E_1)$

Θεωρώ σημείο $P \in (E_1)$

και ευθεία $PP' \perp (\Pi_1)$.

Παρανοῦς η ευθεία PP'
περιέχεται στο επίπεδο

(Π_2) που είναι το κάθετο

επίπεδο στο (Π_1) που περιέχει
την (E_1)

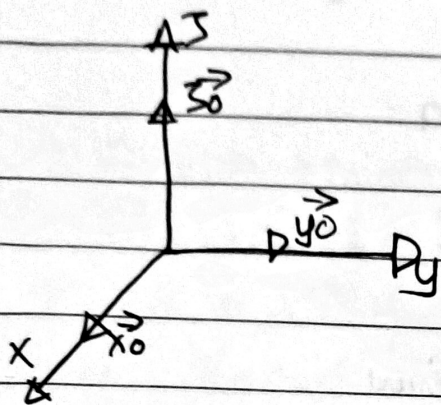
Θεωρώ ευθεία $(\Pi) \parallel (E_1)$ με $P' \in (\Pi)$

Η ευθεία QQ' είναι η κοινή κάθετη των
ασύμβατων ευθειών $(E_1), (E_2)$. Είναι μοναδική
ευθεία με αυτή την ιδιότητα. Το μήκος των

του τμήματος αα' καθέται απόσταση των
ασυμβάτων ευθειών (Ε1), (Ε2)

Καρτεσιανό σύστημα συγγραμμένων

Έστω $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ ορθοκανονικά δεξιόστροφη βάση

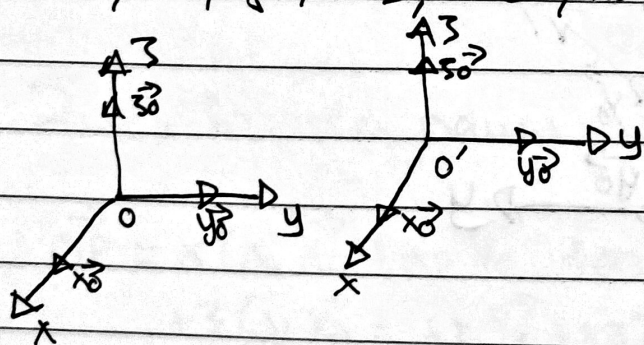


Ορίζεται το καρτεσιανό σύστημα
συγγραμμένων $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$
έχει συγγραμ. αν το
διάνυσμα θέσης του φαίνεται
έτσι: $\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$

Αλλαγές συστημάτων συγγραμμένων

1). Παράλληλη μεταφορά

Θεωρώ τα συστήματα συγγραμμένων με αφετηρία
 $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}, \{O', \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$



Ποιοι είναι οι μετασχηματισμοί συγγραμμένων;

Έστω (x, y, z) και (X, Y, Z) οι τυχόντες συν/μενες
σημεία P ως προς το σύστημα συγγραμμένων
 $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O', \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ αντιστοίχως.

Αντιθέτως είναι $\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ και $\vec{O'P} = X\vec{x}_0 + Y\vec{y}_0 + Z\vec{z}_0$

$$\vec{OP} = 0\vec{O}' + 0\vec{P} \quad (*)$$

Έστω (α, β, γ) οι συντεταγμένες του O' ως προς το $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ δηλαδή

$$\vec{OO}' = \alpha \vec{x}_0 + \beta \vec{y}_0 + \gamma \vec{z}_0 \quad (**)$$

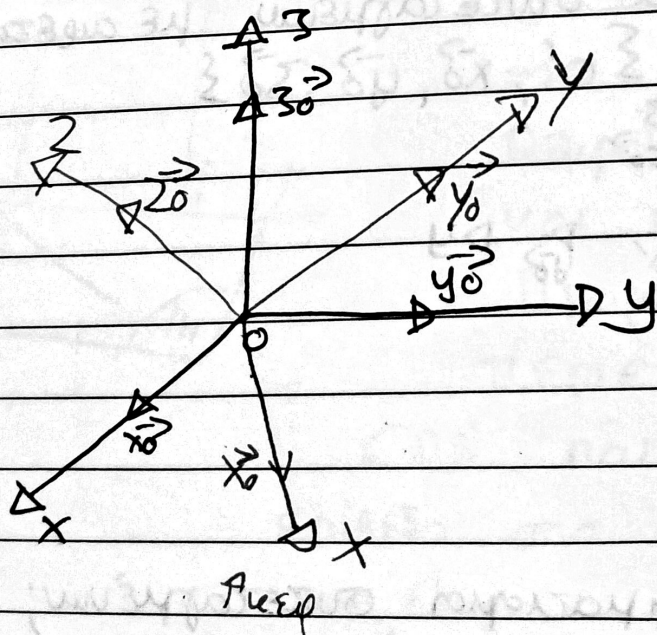
$$* \Leftrightarrow \begin{matrix} (1), (2), (3) \\ x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0 = \alpha \vec{x}_0 + \beta \vec{y}_0 + \gamma \vec{z}_0 + X \vec{x}_0 + Y \vec{y}_0 + Z \vec{z}_0 \\ \Leftrightarrow x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0 = (x + \alpha) \vec{x}_0 + (y + \beta) \vec{y}_0 + (z + \gamma) \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \\ z = Z + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \\ Z = z - \gamma \end{cases}$$

2) Στροφή συστήματος συντεταγμένων

Θεωρούμε σημεία συντεταγμένων $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

με κοινή αρχή O , όπου $\{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ ορθομοναδιαίες δεξιοστροφές βάσεις.



Έστω $(x, y, z), (X, Y, Z)$ οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου P ως προς τα σημεία $\{O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\}$ και $\{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ αντιστοίχως δηλ

$$\vec{OP} = x\vec{x_0} + y\vec{y_0} + z\vec{z_0} \quad \downarrow \text{μικρό}$$

$$\vec{OP} = x\vec{x_0} + y\vec{y_0} + 2z\vec{z_0} \quad \uparrow \text{μικρό} \quad (2)$$

$$\vec{x_0} = a_1 \vec{X_0} + a_2 \vec{Y_0} + a_3 \vec{Z_0}$$

$$\vec{y_0} = \beta_1 \vec{X_0} + \beta_2 \vec{Y_0} + \beta_3 \vec{Z_0}$$

$$\vec{z_0} = \gamma_1 \vec{X_0} + \gamma_2 \vec{Y_0} + \gamma_3 \vec{Z_0}$$

$$a_1 = \langle \vec{x_0}, \vec{x_0} \rangle, a_2 = \langle \vec{x_0}, \vec{y_0} \rangle, a_3 = \langle \vec{x_0}, \vec{z_0} \rangle$$

$$\beta_1 = \langle \vec{y_0}, \vec{x_0} \rangle, \beta_2 = \langle \vec{y_0}, \vec{y_0} \rangle, \beta_3 = \langle \vec{y_0}, \vec{z_0} \rangle$$

$$\gamma_1 = \langle \vec{z_0}, \vec{x_0} \rangle, \gamma_2 = \langle \vec{z_0}, \vec{y_0} \rangle, \gamma_3 = \langle \vec{z_0}, \vec{z_0} \rangle$$

* Είχαμε πει ότι
 όταν $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ορθόνη τότε
 $\vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} + \langle \vec{a}, \vec{e_2} \rangle \vec{e_2} + \langle \vec{a}, \vec{e_3} \rangle \vec{e_3}$
 από: $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3}$ *

Ορισμός: Ένας πίνακας A $n \times n$ καλείται
ορθογώνιος $\Leftrightarrow A A^t = I_n = A^t A \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

Πρόταση: Ο πίνακας μεταβάσεων από ορθοκανονικά
 βάση σε ορθοκανονικά βάση είναι ορθογώνιος

Συνεχίζω τα πάνω

$$\vec{OP} = x(a_1 \vec{X_0} + a_2 \vec{Y_0} + a_3 \vec{Z_0}) + y(\beta_1 \vec{X_0} + \beta_2 \vec{Y_0} + \beta_3 \vec{Z_0}) + z(\gamma_1 \vec{X_0} + \gamma_2 \vec{Y_0} + \gamma_3 \vec{Z_0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OP} = (x a_1 + y \beta_1 + z \gamma_1) \vec{X_0} + (x a_2 + y \beta_2 + z \gamma_2) \vec{Y_0} + (x a_3 + y \beta_3 + z \gamma_3) \vec{Z_0} \quad (2)$$

Αρα από (1), (2) έχω

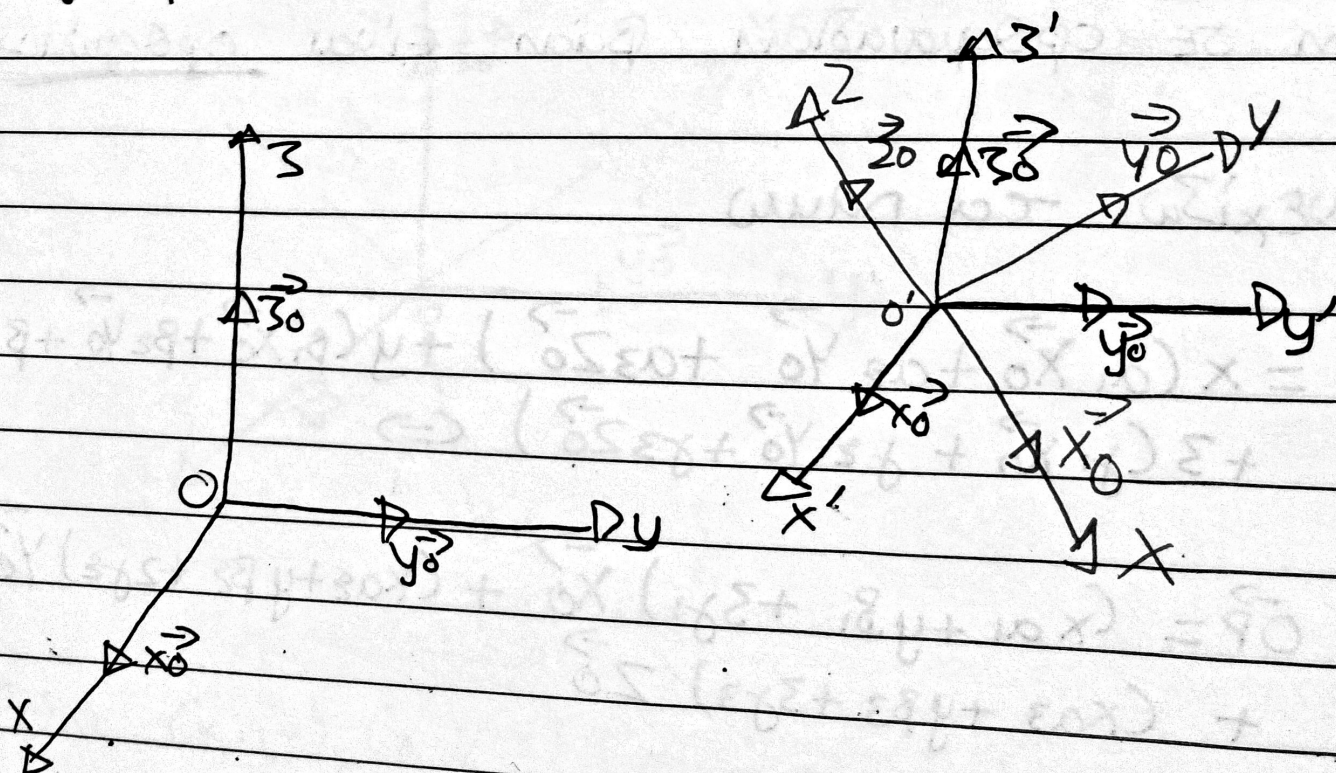
$$\begin{cases} X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ Y = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ Z = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

3) Παράδειγμα μεταφοράς και σύγκριση

Δίνονται τα συστήματα συντεταγμένων $\{O, x_0, y_0, z_0\}$ και $\{O', x_0', y_0', z_0'\}$ όπου $\{x_0, y_0, z_0\}$ και $\{x_0', y_0', z_0'\}$ ορθοκανονικές δεξιόστροφες βάσεις.



Έστω $(x, y, z), (x', y', z'), (X, Y, Z)$
 οι συνεταγμένες τριών σημείων P ως προς τα
 σημεία $\{O, x_0, y_0, z_0\}, \{O', x'_0, y'_0, z'_0\}, \{O'', x''_0, y''_0, z''_0\}$

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + \beta \\ z = z' + \gamma \end{cases} \quad \text{όπου } (a, \beta, \gamma) \text{ οι συνεκτες του } O' \text{ ως προς } \{O, x_0, y_0, z_0\}$$

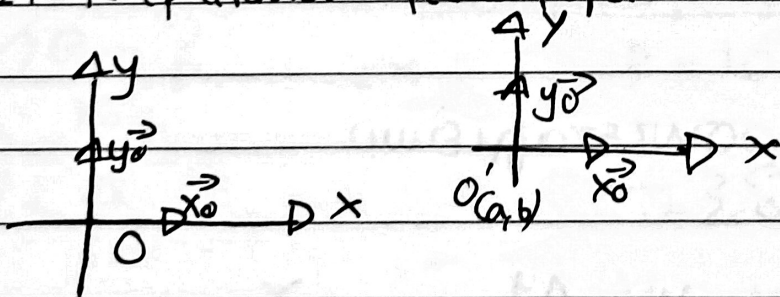
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Σχόδιο: Μια βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι
 δεξιόστροφη $\Leftrightarrow [e_1, e_2, e_3] > 0$.

Αλλαγές συστημάτων συνεταγμένων στο επίπεδο

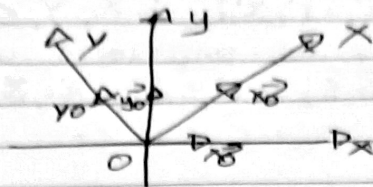
1) Παράλληλη μεταφορά



$\{O, x_0, y_0\}, \{O', x'_0, y'_0\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix}$$

2) Στροφή



$$\vec{x}_0 = \langle \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle + \langle \vec{x}_0, \vec{y}_0 \rangle \vec{y}_0$$

$$P(x, y) \quad P(x, y) \\ \in \{ \vec{x}_0, \vec{y}_0 \} \quad \in \{ 0, x_0, y_0 \}$$

$$\vec{x}_0 = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y} \Rightarrow \vec{x}_0 = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}$$

$$\begin{cases} \vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 \\ \vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\vec{y}_0 = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \vec{x} + \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \vec{y} \Rightarrow$$

$$\vec{y}_0 = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y}$$

$$\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 = x(\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) + y(-\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y}) \\ \Leftrightarrow \vec{OP} = (x \cos \theta - y \sin \theta) \vec{x} + (x \sin \theta + y \cos \theta) \vec{y}$$

$$\text{Αρα } \vec{x} = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y = x \sin \theta + y \cos \theta$$

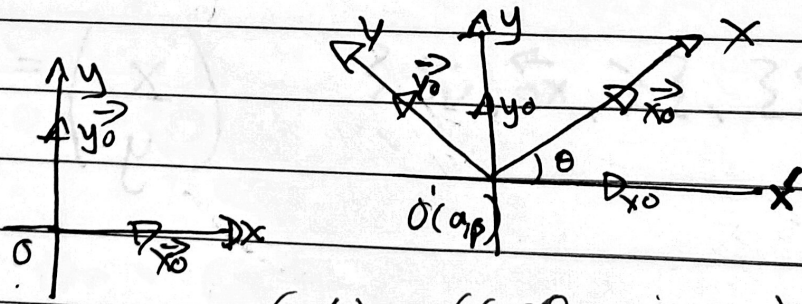
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

↑ ορθογώνιος

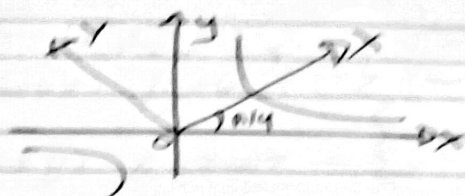
ο αντιστροφή, ο αντιστροφή είναι,

3) Παράδειγμα μεταφορά και στροφή

Δίνονται τα συστήματα συντεταγμένων $\{0, \vec{x}_0, \vec{y}_0\}$, $\{0', \vec{x}_0', \vec{y}_0'\}$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \end{cases}$$

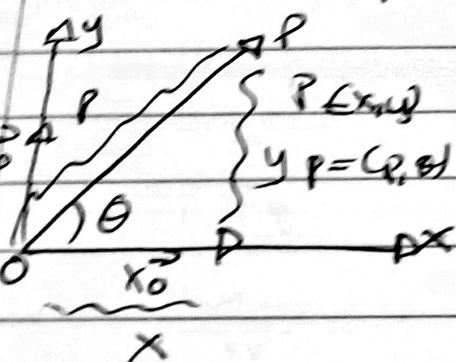
$$x \cdot y = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (x'^2 - y'^2) = 1 \Leftrightarrow \boxed{x'^2 - y'^2 = 2}$$

ΕΙΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

1) Πolaris συνλves στο επίπεδο

Δίνεται ημιευθεία Ox με αρχή O



Το τυχόν σημείο P του
επίπεδου καθορίζεται από τους
αριθμούς r, θ ως εξής
 $r = |OP|, \theta \in [0, 2\pi)$

$$\theta = \kappa(\vec{OP}, \alpha) = \angle(\vec{Ox}, \vec{OP})$$

Το σημείο O καλείται πόλος
και η ημιευθεία Ox καλείται
πόλικος άξονας.

Το ζεύγος (r, θ) καλείται

πόλικές συντεταγμένες του P

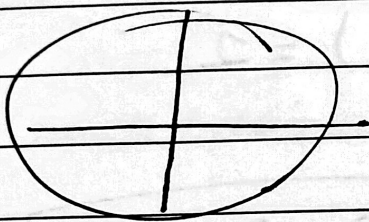
$r =$ πόλικη απόσταση και $\theta =$ πόλικη γωνία.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \text{ ή} \\ \tan \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0). \end{array} \right.$$

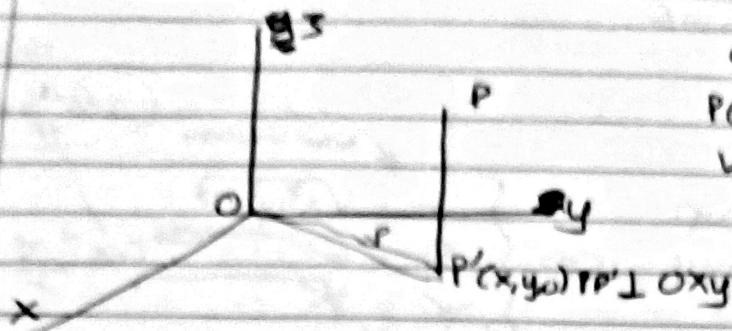
Παράδειγμα.

σε πόλινες συν.

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow p^2 = r^2 \Leftrightarrow p = r$$



2) Κυλινδρικές συν/νες στο χώρο



Θεωρώ καρτεσιανό
σύστημα συντεταγμένων
και $P(x, y, z)$ τυχαίο
σημείο. Φέρω ευθεία

Επιδείνω πολικές συντεταγμένες
στο επίπεδο Oxy με πόλο O

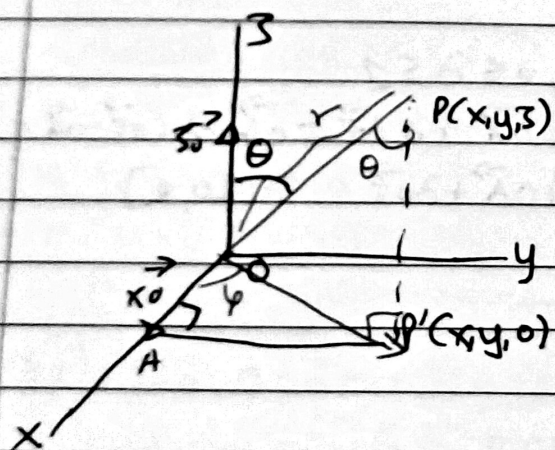
και πολικό άξονα Ox

$$r = |\vec{OP'}|, \quad \phi = \kappa(\vec{OP'}, \vec{x_0}) \quad x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

Η τριάδα (r, ϕ, z) είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες
του P .

3) Σφαιρικές συντεταγμένες



Θεωρώ καρτεσιανό

σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$

Η προβολή P' του

τυχαίου σημείου $P(x, y, z)$

έχει συντεταγμένες $(x, y, 0)$

$$r = |\vec{OP'}|, \quad \phi = \kappa(\vec{OP'}, \vec{x_0}),$$

$$\theta = \kappa(\vec{OP}, \vec{z_0})$$

$$r \geq 0, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi]$$

Η τριάδα (r, ϕ, θ) είναι οι

σφαιρικές συντεταγμένες του P .

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OPP' έχω

$$z = |\vec{OP}| \cos \theta \Leftrightarrow \boxed{z = r \cos \theta}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAP' έχω $\begin{cases} x = |\vec{OP}| \cos \phi \\ y = |\vec{OP}| \sin \phi \end{cases}$

Από το $\triangle OPP'$ έχω $|\vec{OP}'| = |\vec{OP}| \sin \theta$
 $\Leftrightarrow |\vec{OP}'| = r \sin \theta$

Συμπέρασμα

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

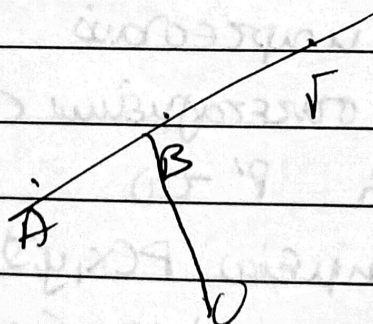
and
 $\tan \varphi = \frac{y}{x}$

ΠΡΟΣΕΣ
 ΜΕΤΡ.

$$\cos^{-1} \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{r}$$

Το ματρίδα για τη σφαιρομετρία είναι το σύνολο $\mathbb{R}^3$

Ενώ το ματρίδα για την επιμετρομετρία $\mathbb{R}^2$



$$\vec{AB} = \lambda \vec{AT}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OA} + \lambda \vec{AT} = \vec{OA} + \lambda (\vec{OT} - \vec{OA})$$

$$\vec{OB} = (1 - \lambda) \vec{OA} + \lambda \vec{OT} \quad \lambda \in [0, 1]$$